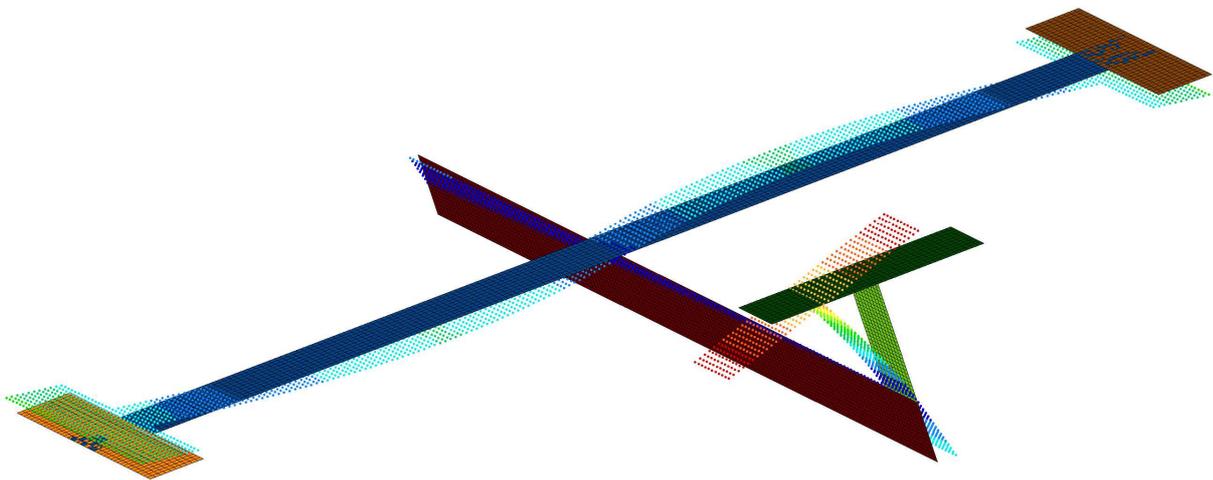


# Analyse modale

F. Louf



*Dans cette fiche on montre comment effectuer une analyse modale, avec et sans conditions aux limites, dans Catia. Les premiers modes de la structure sont calculés au préalable de façon approchée à partir de la méthode du quotient de Rayleigh afin de les comparer aux différents résultats éléments finis.*



# 1 Support de l'étude proposé

La structure proposée ici représente très sommairement un avion. Cette structure a été réalisée dans le but de valider, ou invalider, des méthodes de recalage. Ces méthodes ont pour objectif de mesurer un écart entre des résultats d'essai (figure 2) et des résultats issus de modèles, généralement éléments finis, plus ou moins fins, et de corriger ceux-ci en vue de réduire cet écart.

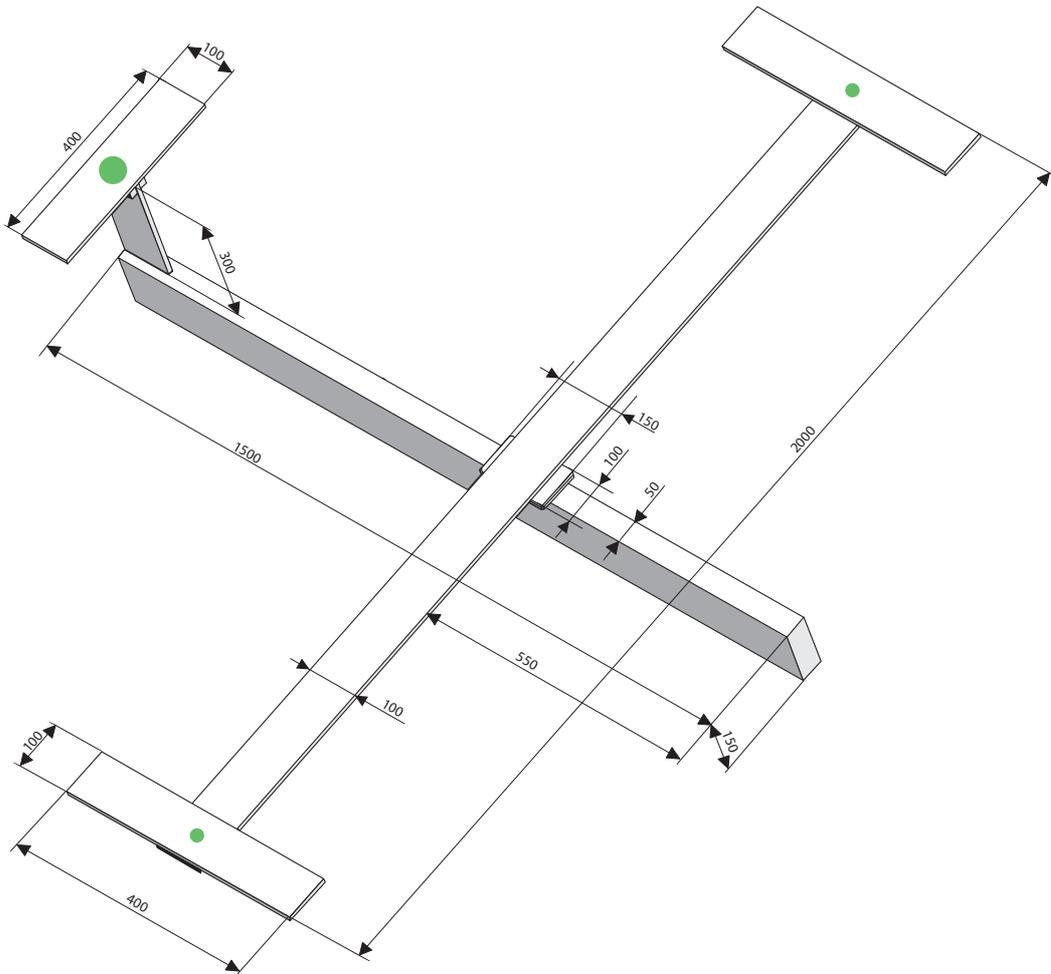


FIG. 1 – Géométrie de la structure testée en laboratoire

Les différentes sous-structures sont toutes réalisées en aluminium. On prendra  $E = 72 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ . Les dimensions de la structure sont données sur la figure 1. Les épaisseurs manquantes sont données dans le tableau 1. La fibre moyenne des ailes est décalée du plan supérieur du fuselage au moyen de cales d'épaisseur totale  $c = 26 \text{ mm}$ . Enfin des masses ponctuelles de  $200 \text{ g}$  sont ajoutées au centre des ailerons, et de  $500 \text{ g}$  sur le haut de la queue, au centre.

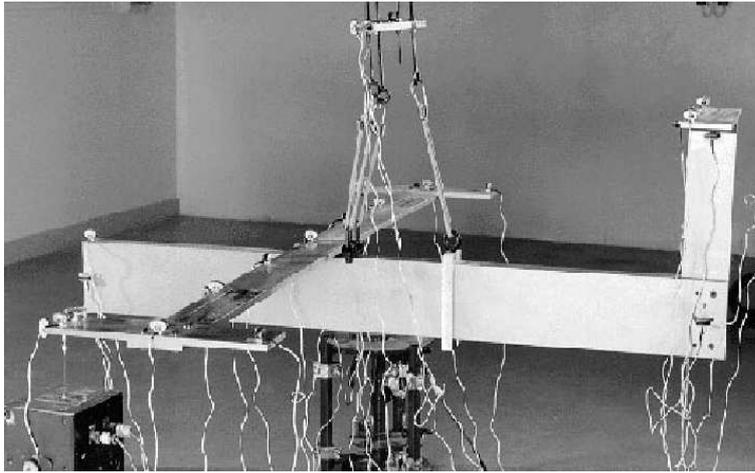


FIG. 2 – Photo d'un essai de vibrations libres réalisé en laboratoire

Fuselage	$e = 50 \text{ mm}$
Ailes	$e = 11 \text{ mm}$
Tout le reste	$e = 10 \text{ mm}$

TAB. 1 – Données sur les épaisseurs

## 2 Approche analytique

### 2.1 Calculs de quelques grandeurs utiles

L'objectif est ici d'obtenir simplement une estimation des modes de flexion des ailes (symétriques et antisymétriques). Pour cela on considère différents modèles cinématiques associés à une aile de longueur  $L = 900 \text{ mm}$ . En effet, on considère que l'encastrement sur le fuselage est décalé de la demi largeur des cales, soit  $50 \text{ mm}$ . La masse de l'aileron et la masse additionnelle sont appliquées au centre de celui-ci soit à  $50 \text{ mm}$  avant l'extrémité de l'aile. L'aileron rigidifiant l'extrémité de l'aile, on ne modélise pas les derniers  $50 \text{ mm}$ .

Dans les différents modèles proposés, on utilisera les caractéristiques inertielles du fuselage. On néglige les caractéristiques inertielles de l'ensemble de la queue. Le calcul de la masse du fuselage est simple :

$$M_{fus} = \rho b_{fus} h_{fus} L_{fus} = 2700 * 0.150 * 0.050 * 1.500 = 30.375 \text{ kg}$$

Le calcul de l'inertie autour de l'axe du fuselage  $\vec{y}$ , au centre d'inertie du fuselage donne :

$$\begin{aligned} I_{fus,G} &= \int_{-b_{fus}/2}^{+b_{fus}/2} \int_{-h_{fus}/2}^{+h_{fus}/2} \int_{-L_{fus}/2}^{+L_{fus}/2} \rho(x^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \rho L_{fus} \left[ \frac{b_{fus}^3 h_{fus}}{12} + \frac{b_{fus} h_{fus}^3}{12} \right] \\ &= \frac{M_{fus}}{12} [b_{fus}^2 + h_{fus}^2] = \frac{30.375}{12} [0.05^2 + 0.15^2] = 0.0633 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

Si l'on ramène cette inertie au niveau du point d'attache de l'aile sur le fuselage, sur le plan de symétrie de la maquette, on obtient, via le théorème de Huygens :

$$\begin{aligned} I_{fus} &= I_{fus,G} + M_{fus} \left( \frac{h_{fus} + h_{ail}}{2} + c \right)^2 \\ &= 0.0633 + 30.375 * (0.075 + 0.0055 + 0.026)^2 = 0.4078 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

## 2.2 Estimation du mode de flexion symétrique des ailes

### 2.2.1 Fuselage immobile

On fait l'hypothèse que le fuselage reste immobile dans ce mode. Dans ce cas, le modèle adapté au calcul du mode de flexion symétrique des ailes est celui proposé sur la figure 3. On utilise



FIG. 3 – Premier modèle cinématique associé à l'hypothèse du fuselage immobile

la méthode du quotient de Rayleigh pour estimer par excès la pulsation fondamentale de la structure ainsi modélisée. Le champ test utilisé est la déformée statique d'une poutre encadrée avec effort en bout :

$$V_0(x) = \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad (1)$$

Le quotient de Rayleigh est, pour la modélisation retenue, si l'on tient compte des masses ponctuelles en bout :

$$R(V_0) = \frac{\int_0^L EI(V_0''(x))^2 dx}{\int_0^L \rho S(V_0(x))^2 dx + (M_{add} + M_{ail})(V_0(L))^2} \quad (2)$$

où  $I$  est le moment quadratique de la section droite de l'aile, et  $S$  sa section. On obtient, tous calculs faits :

$$f_0 = \frac{\sqrt{R(V_0)}}{2\pi} = 6.60 \text{ Hz} \quad (3)$$

La déformée modale retenue  $V_0$  est tracée sur la figure 4.

### 2.2.2 Fuselage mobile en translation

On fait maintenant l'hypothèse que le fuselage bouge verticalement dans son plan de symétrie lors du premier mode de flexion symétrique des ailes. Le modèle cinématique associé est proposé sur la figure 5.

Dans ce cas, le premier mode est un mode de corps rigide, le second est le mode dont on cherche la fréquence.

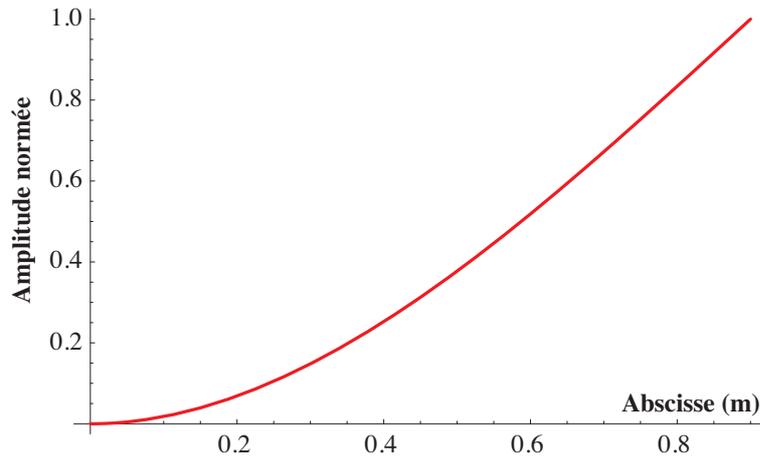


FIG. 4 – Déformée modale associée au premier mode de flexion symétrique (modèle avec fuselage immobile)

On utilise donc la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension 2. Les vecteurs retenus dans la base sont :

$$V_{1,1}(x) = 1 \quad (4)$$

$$V_{1,2}(x) = V_0(x) \quad (5)$$

Le mode cherché est de la forme générale :

$$V_1(x) = \alpha_1 V_{1,1}(x) + \alpha_2 V_{1,2}(x) \quad (6)$$

Il faut ensuite minimiser le quotient de Rayleigh associé au champ  $V_1$  :

$$R(V_1) = \frac{\int_0^L EI(V_1''(x))^2 dx}{\int_0^L \rho S(V_1(x))^2 dx + (M_{add} + M_{ail})(V_1(L))^2 + M_{fus}(V_1(0))^2} \quad (7)$$

$$= \frac{\{\alpha\}^T [K] \{\alpha\}}{\{\alpha\}^T [M] \{\alpha\}} \quad (8)$$

par rapport aux coefficients  $\{\alpha\}$ . Dans cette expression, les termes des matrices  $[K]$  et  $[M]$  sont :

$$k_{11} = EI \int_0^L V_{1,1}''(x) V_{1,1}''(x) dx$$

$$k_{22} = EI \int_0^L V_{1,2}''(x) V_{1,2}''(x) dx$$

$$k_{12} = EI \int_0^L V_{1,1}''(x) V_{1,2}''(x) dx = k_{21}$$

et

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= \rho S \int_0^L V_{1,1}(x)V_{1,1}(x)dx + (M_{add} + M_{ail})V_{1,1}(L)V_{1,1}(L) + M_{fus}V_{1,1}(0)V_{1,1}(0) \\
 m_{22} &= \rho S \int_0^L V_{1,2}(x)V_{1,2}(x)dx + (M_{add} + M_{ail})V_{1,2}(L)V_{1,2}(L) + M_{fus}V_{1,2}(0)V_{1,2}(0) \\
 m_{12} &= \rho S \int_0^L V_{1,1}(x)V_{1,2}(x)dx + (M_{add} + M_{ail})V_{1,1}(L)V_{1,2}(L) + M_{fus}V_{1,1}(0)V_{1,2}(0) \\
 &= m_{21}
 \end{aligned}$$

On arrive au problème aux valeurs propres suivant :

$$([K] - \omega^2[M])\{\alpha\} = \{0\} \quad (9)$$

Les pulsations propres solutions de l'équation aux pulsations propres  $|[K] - \omega^2[M]| = 0$  sont :

$$f_{1,1} = 0 \text{ Hz} \quad f_{1,2} = 7.13 \text{ Hz} \quad (10)$$

Le premier mode propre de flexion symétrique est alors tel que  $\alpha_1 = 0.02898\alpha_2$ . Ce mode est tracé sur la figure 6 tel que l'amplitude maximale soit unitaire.

**Remarque.** – On peut être surpris par le fait que la fréquence soit plus élevée que la précédente alors que l'on a assoupli la structure en ôtant une liaison avec le bâti. Pour s'en convaincre, on peut calculer les fréquences fondamentales des modèles continus associés, c'est-à-dire sans masse ponctuelle. On obtient comme équations aux pulsations propres :

$$\cos(\beta L)ch(\beta L) + 1 = 0 \quad \text{pour la poutre encastrée-libre}$$

et

$$\tan(\beta L) + th(\beta L) = 0 \quad \text{pour la poutre encastrée-libre avec translation transversale}$$

Les racines de ces deux équations sont données sur le graphe de la figure 7. La première pulsation propre associée au modèle de la figure 3 est bien inférieure à celle associée au modèle de la figure 5. En fait, la comparaison qualitative ne peut pas être faite ici, car on devrait comparer les deux premières fréquences propres : celle du modèle avec translation du fuselage étant nulle, elle est bien inférieure à la première fréquence propre de la poutre encastrée libre.

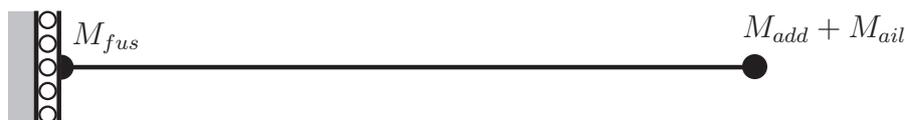


FIG. 5 – Second modèle cinématique associé à l'hypothèse du fuselage mobile

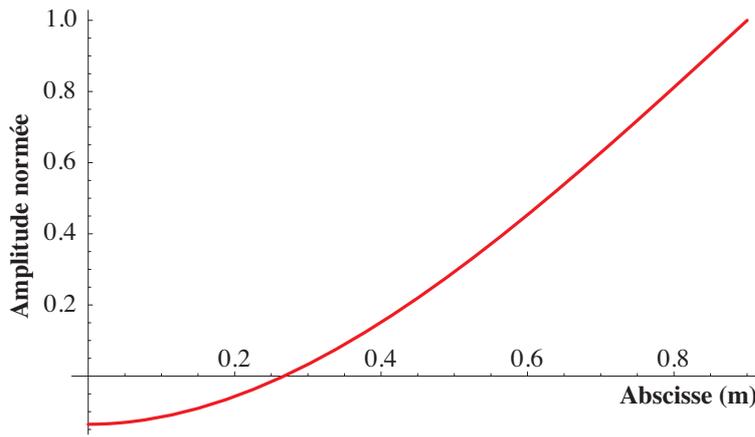


FIG. 6 – Déformée modale associée au premier mode de flexion symétrique (modèle avec fuselage mobile en translation)

## 2.3 Estimation du mode de flexion antisymétrique des ailes

### 2.3.1 Fuselage mobile en rotation

Pour approximer le premier mode antisymétrique, on considère maintenant que l'aile tourne en  $x = 0$  autour de l'axe  $\vec{y}$ . Dans cette rotation, le fuselage tourne aussi puisque l'aile est encastree sur le fuselage. Ainsi, on obtient le modèle cinématique présenté figure 8.

On utilise donc la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension 2. Les vecteurs retenus dans la base sont cette fois :

$$V_{2,1}(x) = x \quad (11)$$

$$V_{2,2}(x) = V_0(x) \quad (12)$$

Le mode cherché est de la forme générale :

$$V_2(x) = \alpha_1 V_{2,1}(x) + \alpha_2 V_{2,2}(x) \quad (13)$$

Il faut ensuite minimiser le quotient de Rayleigh associé au champ  $V_2$  :

$$R(V_2) = \frac{\int_0^L EI(V_2''(x))^2 dx}{\int_0^L \rho S(V_2(x))^2 dx + (M_{add} + M_{ail})(V_2(L))^2 + I_{fus}(V_2'(0))^2} \quad (14)$$

$$= \frac{\{\alpha\}^T [K] \{\alpha\}}{\{\alpha\}^T [M] \{\alpha\}} \quad (15)$$

Les pulsations propres solutions de l'équation aux pulsations propres  $|[K] - \omega^2[M]| = 0$  sont :

$$f_{2,1} = 0 \text{ Hz} \quad f_{2,2} = 18.86 \text{ Hz} \quad (16)$$

Le premier mode propre de flexion symétrique est alors tel que  $\alpha_1 = 0.22457\alpha_2$ . Ce mode est tracé sur la figure 9 tel que l'amplitude maximale soit unitaire.

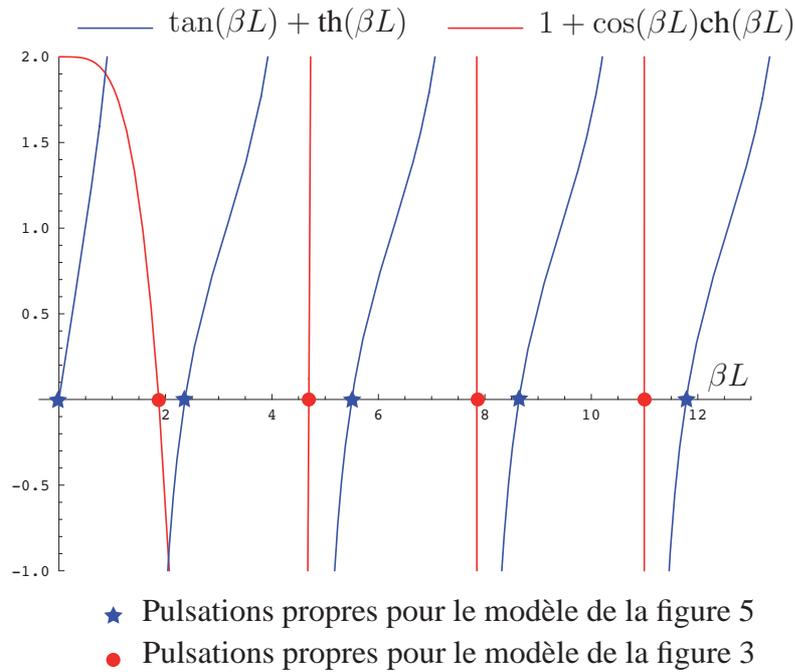


FIG. 7 – Solutions de l'équation aux pulsations propres associée aux modèles des figures 3 et 5 sans masses ajoutées



FIG. 8 – Premier modèle cinématique associé à l'hypothèse du fuselage mobile en rotation

### 2.3.2 Fuselage mobile en rotation et translation

Pour approximer le premier mode antisymétrique, on considère maintenant que le fuselage tourne autour de son axe et qu'il peut également se translater. Ainsi, on obtient le modèle cinématique présenté figure 10.

On utilise donc la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension 3. Les vecteurs retenus dans la base sont cette fois :

$$V_{3,1}(x) = 1 \quad (17)$$

$$V_{3,2}(x) = x \quad (18)$$

$$V_{3,3}(x) = V_0(x) \quad (19)$$

Le mode cherché est de la forme générale :

$$V_3(x) = \alpha_1 V_{3,1}(x) + \alpha_2 V_{3,2}(x) + \alpha_3 V_{3,3}(x) \quad (20)$$

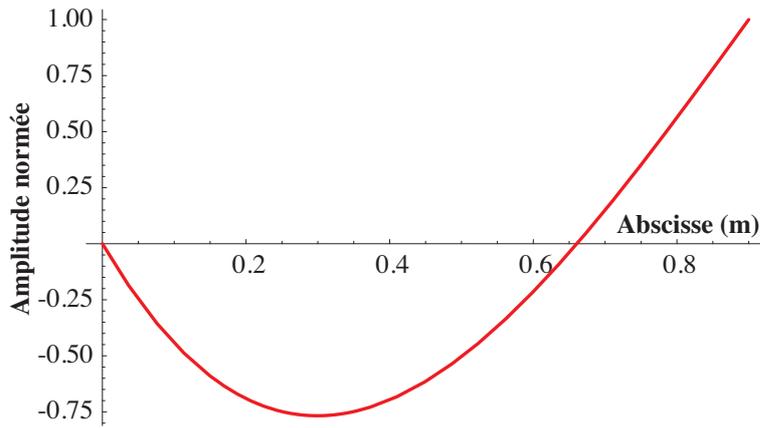


FIG. 9 – Déformée modale associée au premier mode de flexion antisymétrique (modèle avec fuselage mobile en rotation)

Il faut ensuite minimiser le quotient de Rayleigh associé au champ  $V_3$  :

$$R(V_3) = \frac{\int_0^L EI(V_3''(x))^2 dx}{\int_0^L \rho S(V_3(x))^2 dx + (M_{add} + M_{ail})(V_3(L))^2 + M_{fus}(V_3(0))^2 + I_{fus}(V_3'(0))^2} \quad (21)$$

$$= \frac{\{\alpha\}^T [K] \{\alpha\}}{\{\alpha\}^T [M] \{\alpha\}} \quad (22)$$

Les pulsations propres solutions de l'équation aux pulsations propres  $|[K] - \omega^2[M]| = 0$  sont :

$$f_{3,1} = 0 \text{ Hz} \quad f_{3,2} = 0 \text{ Hz} \quad f_{3,3} = 18.89 \text{ Hz} \quad (23)$$

Le premier mode propre de flexion symétrique est alors tel que  $\alpha_1 = 0.0071\alpha_2$  et  $\alpha_3 = -4.4909\alpha_2$ . Ce mode est tracé sur la figure 11 tel que l'amplitude maximale soit unitaire.



FIG. 10 – Premier modèle cinématique associé à l'hypothèse du fuselage mobile en rotation et en translation

### 3 Approche numérique simplifiée

Dans cette partie, on se propose de reprendre les modèles précédents mais cette fois, à l'aide d'un logiciel éléments finis. Les résultats seront comparés à ceux obtenus au paragraphe précédent.

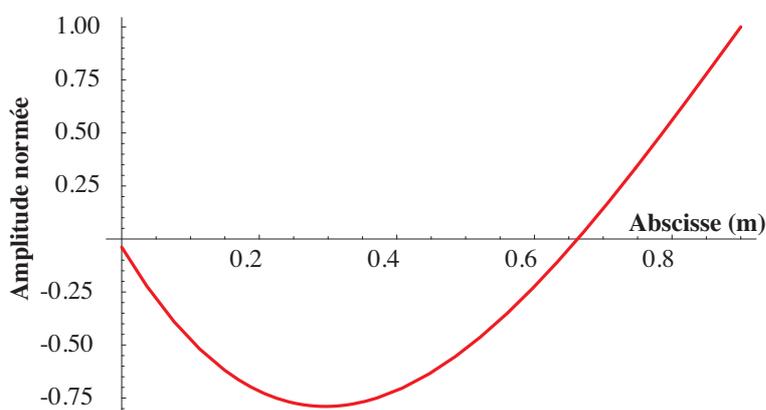


FIG. 11 – Déformée modale associée au premier mode de flexion antisymétrique (modèle avec fuselage mobile en translation et rotation)

### 3.1 Rappel de la géométrie - Modélisation éléments finis

Une aile est modélisée par une plaque de largeur  $100\text{ mm}$  et de longueur  $900\text{ mm}$ . L'épaisseur de la plaque est de  $11\text{ mm}$ .

Pour créer la géométrie, on suivra la démarche explicitée ci dessous :

- Créer un nouvelle pièce et la renommer Aile ;
- Démarrer l'atelier *Forme/Generative Shape Design* ;
- Insérer un set géométrique si l'arbre n'en contient pas un par défaut à l'aide du menu *Insertion/Set Géométrique* ;
- Dans le plan de référence  $(\vec{x}, \vec{y})$ , définir une esquisse de forme rectangulaire et préciser les dimensions ( $900\text{ mm}$  selon  $\vec{x}$  et  $100\text{ mm}$  selon  $\vec{y}$ ) ;
- A l'aide de l'outil *Remplissage*, remplir le contour défini par l'esquisse précédemment créée ; cacher enfin cette dernière ;
- Affecter un matériau type aluminium à l'objet *Remplissage* ; éditer les propriétés du matériau et imposer les bonnes valeurs pour  $E$  et  $\rho$ .

Pour définir le maillage et les propriétés de la plaque, suivre la démarche ci-dessous :

- Démarrer l'atelier *Analyse et Simulation/Advanced Meshing Tools* ;
- Dans la fenêtre qui s'ouvre, demander d'insérer un cas d'analyse modale ;
- Définir les paramètres du maillage de quadrangles que l'on souhaite réaliser : pour cela cliquer sur l'icône *Mailleur avancé* et :
  - Sélectionner *Quadrangle* comme type de maille ;
  - Entrer une taille de maille de  $10\text{ mm}$  ;
  - Cocher la case *Maillage directionnel* ;
  - Dans l'onglet *Géométrie* imposer une flèche de contrainte de  $2\text{ mm}$  puis valider ;
- Dans l'atelier qui s'est ouvert, cliquer sur l'icône *Maillage de la pièce* pour lancer le calcul du maillage ;
- Une fois la maillage terminé, sortir de l'atelier à l'aide de l'icône *Sortie* ; le maillage créé est affiché ;
- Démarrer l'atelier *Analyse et Simulation/Generative Structural Analysis* ;

Il ne reste plus qu'à définir les conditions aux limites en déplacement et les masses additionnelles propres à chaque cas traité analytiquement.

## 3.2 Estimation du mode de flexion symétrique des ailes

### 3.2.1 Fuselage immobile

On reprend les conditions aux limites proposées au paragraphe 2.2.1. Un encastrement est imposé sur l'arête en  $x = 0$ . On obtient un premier mode de flexion à  $6.64 Hz$ .

### 3.2.2 Fuselage mobile en translation

Dans Catia, on peut :

- Faire une analyse modale d'un solide sans mouvement de corps rigide possible ;
- Faire une analyse modale d'un solide libre de toute condition aux limites.

Malheureusement, un modèle présentant un nombre de mouvements de corps rigides strictement inférieur à 6 n'est pas possible. Il faut donc ruser pour traiter le modèle présenté figure 5. On peut par exemple créer une liaison élastique de très faible raideur dans la direction verticale avec le bâti. Le mode de corps rigide de translation ne sera donc pas tout à fait à  $0 Hz$ . Cela permet de rendre non singulière la matrice de raideur.

Pour faire cela, il suffit de créer, dans la géométrie de l'aile, un point au centre (par exemple) de l'arête mobile et de créer ensuite une *Pièce virtuelle rigide ressort* liant ce point (poignée) à l'arête mobile (support). Cela veut dire que le point en question et les 6 degrés de liberté en un noeud de l'arête sont lié par un mouvement de corps rigide. Un noeud est bien entendu créé au point défini comme la poignée. Ce noeud est ensuite dupliqué et une liaison élastique à 6 composantes est introduite entre les deux noeuds. On obtient donc le modèle de la figure 12(b).

Si l'on encastre la poignée (le point créé précédemment) et que l'on impose des raideurs très grandes dans toutes les directions exceptée la translation selon  $\vec{z}$ , on obtient la liaison souhaitée dans le modèle de la figure 5.

On obtient dans ce cas une fréquence du premier mode de flexion symétrique égale à  $7.17 Hz$ . Le premier mode est bien sûr un mode de corps rigide en translation à une fréquence presque nulle égale à  $0.004 Hz$ .

## 3.3 Estimation du mode de flexion antisymétrique des ailes

### 3.3.1 Fuselage mobile en rotation

Les remarques faites au paragraphe précédent sont toujours valables.

Il faut cette fois imposer une raideur importante au niveau du ressort en translation selon  $\vec{z}$  et une faible raideur en rotation selon  $\vec{y}$  dans la pièce virtuelle rigide ressort précédemment créée. Les masses additionnelles peuvent être conservées à l'extrémité de l'aile, par contre celle modélisant le fuselage doit être supprimée. Enfin, il faut créer l'inertie associée au fuselage et distribuée sur l'arête située sur le plan de symétrie. Pour cela, on peut utiliser avec précaution l'outil *Inertie sur pièce virtuelle*. Pour cela il faut d'abord créer une pièce virtuelle rigide ayant

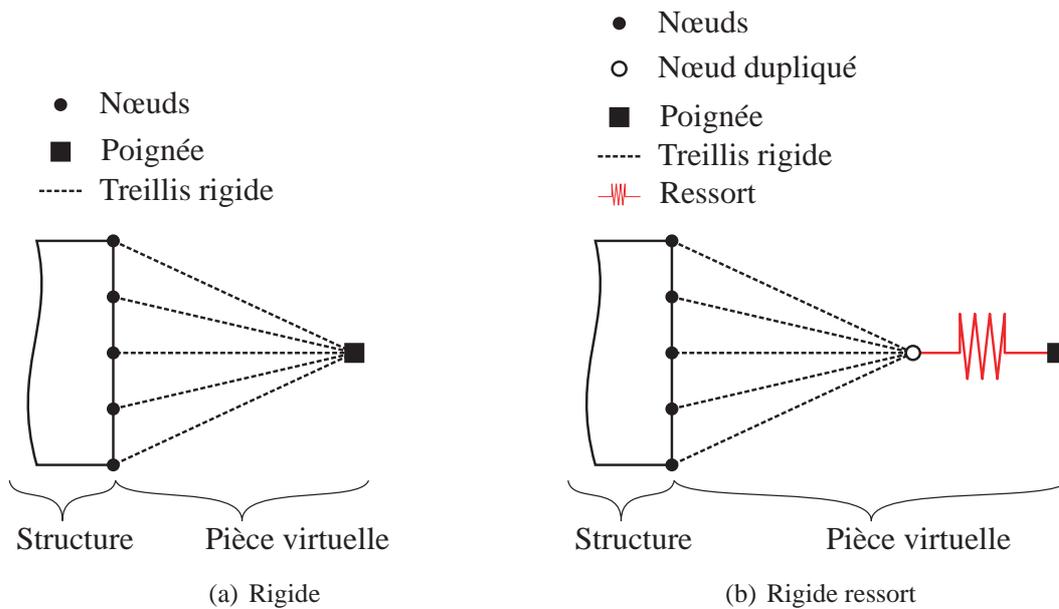


FIG. 12 – Schématisation des pièces virtuelles

pour support l'arête de l'aile en  $x = 0$  et comme poignée un point de coordonnées  $(-5, 50, 0)$ . Sélectionner la *Pièce virtuelle rigide* précédemment créée dans l'arbre comme support et imposer un moment d'inertie selon  $\vec{y}$  de  $0.204 \text{ kg.m}^2$ .

Lancer le calcul.

On obtient dans ce cas une fréquence du premier mode de flexion antisymétrique égale à  $18.91 \text{ Hz}$ . Le premier mode est bien sûr un mode de corps rigide en translation à une fréquence presque nulle  $0.004 \text{ Hz}$ .

### 3.3.2 Fuselage mobile en rotation et en translation

Par rapport au cas précédemment traité, il suffit d'imposer de nouveau une faible raideur du ressort en translation selon  $\vec{z}$  dans la pièce virtuelle rigide ressort et de rajouter une masse distribuée modélisant le fuselage.

On obtient dans ce cas une fréquence du premier mode de flexion antisymétrique égale à  $18.93 \text{ Hz}$ . Les deux premiers modes sont bien sûr des combinaisons de modes de corps rigide en translation et en rotation à une fréquence presque nulle.

## 3.4 Comparaison des modes éléments finis et analytiques

	Sans translation	Avec translation
Analytique	6.60	7.13
Éléments finis - Catia	6.64	7.17
Éléments finis - Cast3M	6.64	7.16

TAB. 2 – Comparaison des fréquences propres éléments finis et analytiques - mode symétrique

	Avec rotation	Avec rotation et translation
Analytique	18.86	18.89
Éléments finis - Catia	18.91	18.93
Éléments finis - Cast3M	18.86	18.88

TAB. 3 – Comparaison des fréquences propres éléments finis et analytiques - mode antisymétrique

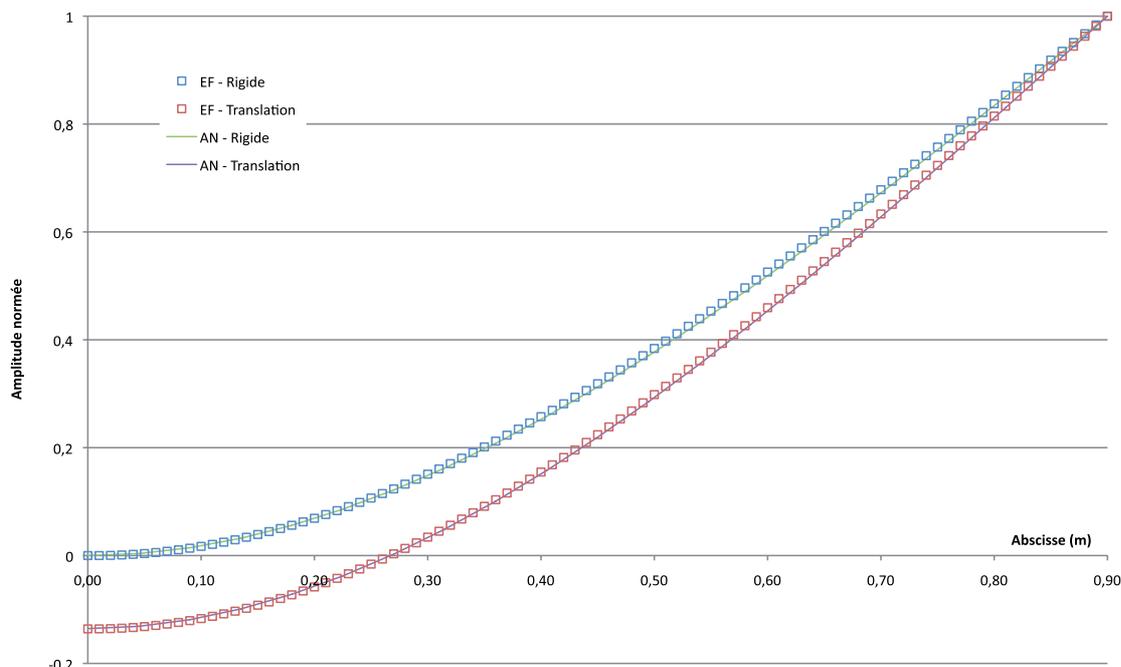


FIG. 13 – Comparaison des déformées modales des modes symétriques obtenus par calcul éléments finis et calcul analytique

## 4 Approche numérique complète

### 4.1 Démarche de construction du modèle

La maquette se compose de 5 sous-structures :

- le fuselage ;
- les ailes ;
- les ailerons ;
- la partie verticale de la queue ;
- la partie horizontale de la queue.

Un fichier *.CATPart* est associé à chacune de ces sous-structures.

Toutes ces sous-structures sont modélisables par des plaques étant données leurs épaisseurs faibles devant les autres dimensions. Par conséquent, on se contente, pour définir leur géométrie, de construire des surfaces planes rectangulaires aux bonnes dimensions.

Un assemblage de ces différentes sous-structures peut ensuite être défini à l'aide de l'atelier *Assembly Design*.

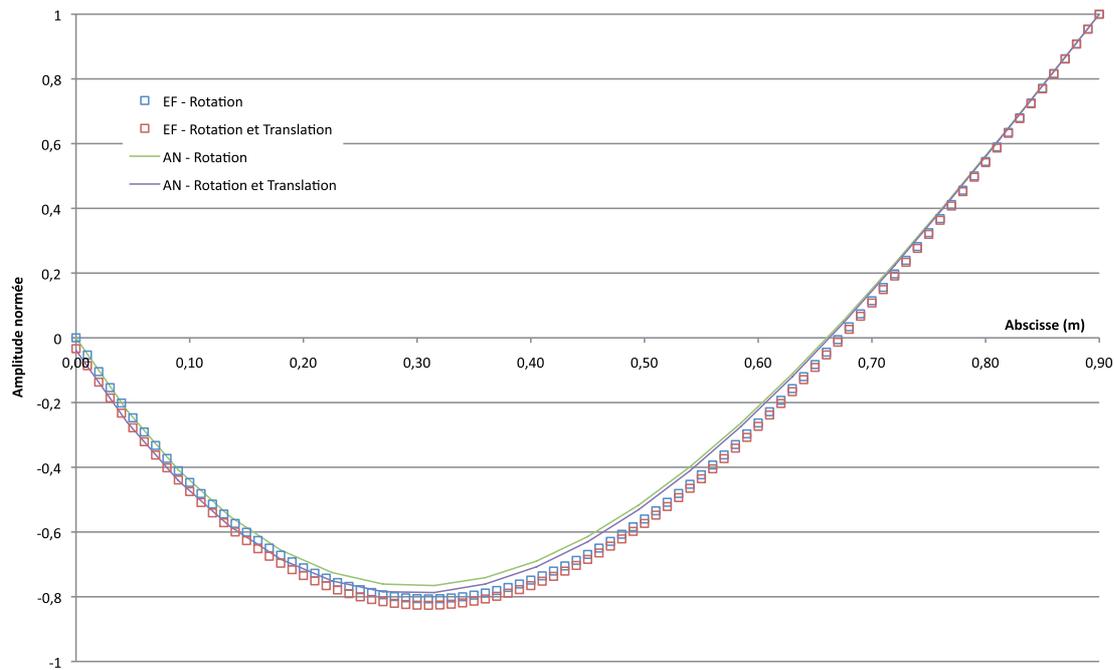


FIG. 14 – Comparaison des déformées modales des modes antisymétriques obtenus par calcul éléments finis et calcul analytique

Une fois que chaque fichier pièce est créé, il faut définir un maillage de cette pièce, ses propriétés (épaisseur), son matériau. Un fichier *.CATAnalysis* sera donc associé à chaque sous-structure.

Enfin, dans l'assemblage, on associera à chaque pièce le fichier *.CATAnalysis* adapté de sorte à pouvoir effectuer par la suite une analyse éléments finis globale.

## 4.2 Géométrie de chaque pièce

Chaque pièce sera créée en suivant la démarche explicitée ci dessous :

- Créer un nouvelle pièce et la renommer (Fuselage, Ailes, Ailerons, Queue\_V, Queue\_H par exemple) ;
- Démarrer l'atelier *Forme/Generative Shape Design* ;
- Insérer un set géométrique si l'arbre n'en contient pas un par défaut à l'aide du menu *Insertion/Set Géométrique* ;
- Dans un des plans de référence standards, définir une esquisse de forme rectangulaire et préciser les dimensions adaptées à chaque pièce ; ces dimensions seront prises sur le dessin d'ensemble de la figure 1 ;
- A l'aide de l'outil *Remplissage*, remplir le contour défini par l'esquisse précédemment créée ; cacher enfin cette dernière ;

Afin de connecter les pièces entre elles au niveau de l'analyse éléments finis, il faut encore créer quelques éléments.

**Supports géométriques pour connexion entre les ailes et le fuselage** Le lien entre ces deux sous-structures est fait par les cales au niveau de la maquette. On va donc créer une liaison entre un segment de longueur  $100\text{ mm}$  sur le fuselage et une surface de  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$  sur les ailes. La pièce Fuselage contient donc en plus de la surface représentant le fuselage lui même une droite. La pièce Ailes contient quant à elle en plus de la surface représentant les ailes une surface plane rectangulaire. Ces éléments sont nommées  $(D_1)$  et  $(A_1)$  dans la figure 15.

**Supports géométriques pour connexion entre les ailes et les ailerons** Les ailes et les ailerons sont en contact sur une surface plane rectangulaire de taille  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ . On représentera donc ces deux surfaces dans la pièce Ailes. On représentera cette surface également dans la pièce Aileron. Ces surfaces sont nommées  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  et  $(A_4)$  dans la figure 15.

**Supports géométriques pour connexion entre le fuselage et la queue verticale** La queue et le fuselage sont en contact selon un segment de droite de longueur  $100\text{ mm}$ . On représentera ce segment dans la pièce Fuselage et dans la pièce Queue\_V. Ces droites sont nommées respectivement  $(D_2)$  et  $(D_3)$  dans la figure 15.

**Supports géométriques pour connexion entre la queue horizontale et la queue verticale** Les deux parties de la queue sont en contact selon un segment de longueur  $100\text{ mm}$ . On représentera ce segment dans les deux pièces. Ces droites sont nommées respectivement  $(D_4)$  et  $(D_5)$  dans la figure 15.

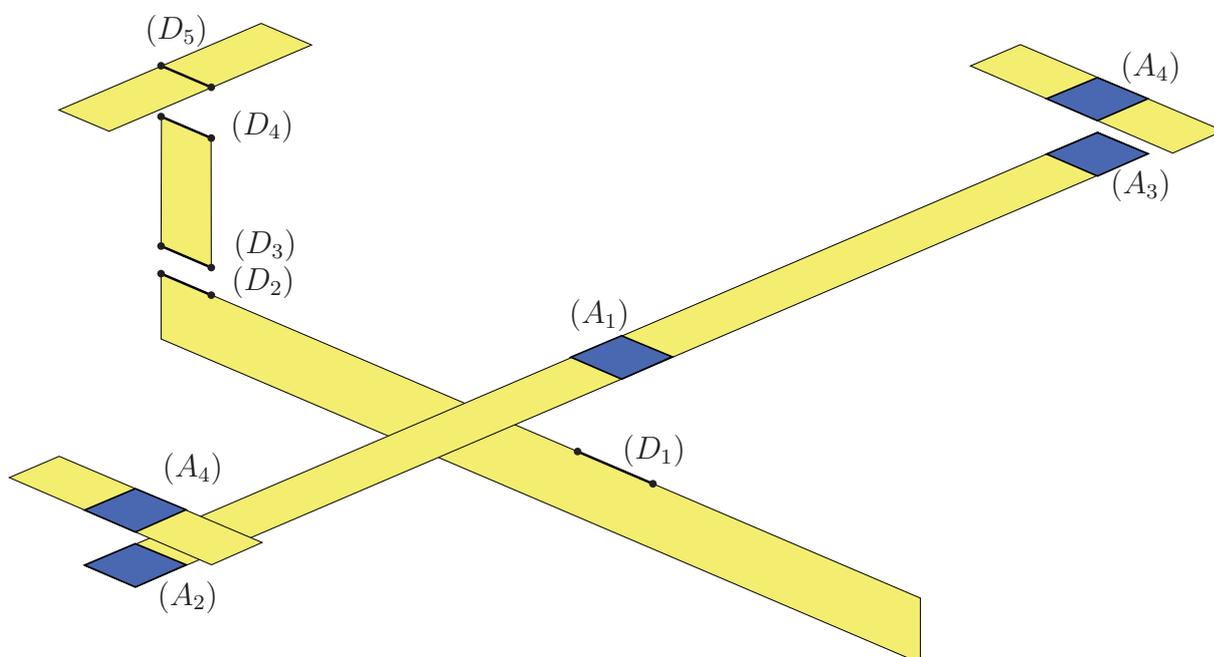


FIG. 15 – Géométrie plaque associée à la maquette - surfaces et droites associées au futures connexions

### 4.3 Maillage et propriétés de chacune des pièces

Pour chacune des pièces créées, on suivra la démarche suivante pour créer le modèle éléments finis associé :

- Démarrer l'atelier *Analyse et Simulation/Advanced Meshing Tools* ;
- Définir les paramètres du maillage de quadrangles que l'on souhaite réaliser : pour cela cliquer sur l'icône *Mailleur avancé* et :
  - Sélectionner *Quadrangle* comme type de maille ;
  - Entrer une taille de maille de 10 mm ;
  - Cocher la case *Maillage directionnel* ;
  - Dans l'onglet *Géométrie* imposer une flèche de contrainte de 2 mm ; valider ;
- Dans l'atelier qui s'est ouvert, cliquer sur l'icône *Maillage de la pièce* pour lancer le calcul du maillage ;
- Une fois la maillage terminé, sortir de l'atelier à l'aide de l'icône *Sortie* ; le maillage créé est affiché ; pour plus de commodité par la suite on peut le colorer en cliquant droit sur l'objet *Maillage de surface avancé* dans l'arbre, et en redéfinissant les propriétés graphiques ;
- Démarrer l'atelier *Analyse et Simulation/Generative Structural Analysis* ;
- Créer un matériau en utilisant l'icône *Matériau utilisateur* ; choisir l'aluminium dont on modifiera les propriétés comme suit :
  - Double-cliquer sur l'objet *Matériau utilisateur* créé sous le noeud *Matériaux* dans l'arbre ;
  - Dans l'onglet *Analyse* de la fenêtre qui s'est ouverte, préciser le bon module de Young et la bonne masse volumique ;
- Définir l'épaisseur de la pièce en cliquant sur l'icône *Propriété coque*, en sélectionnant comme support la surface représentant la sous-structure, et en entrant la valeur numérique de l'épaisseur ;

Pour chacune des sous-structures, il faut maintenant extraire du maillage les noeuds pour lesquels les degrés de liberté vont être liés à d'autres associés à d'autres sous-structures.

### 4.4 Création des groupes pour établir les connexions

La notion de *Groupe* dans l'atelier d'analyse éléments finis de Catia permet d'extraire d'un maillage des noeuds, éléments, etc, associés à une géométrie. Ici on va extraire les noeuds, éléments, proches des surfaces, droites définies dans chacune des sous-structures.

Ce travail se fera pièce par pièce, dans l'atelier *Analyse et Simulation/Generative Structural Analysis*.

Dans le cas du fuselage, il faut créer deux groupes :

- Cliquer sur l'icône *Groupe de ligne par proximité* et sélectionner comme support le segment de droite associé à la connexion avec les ailes ; définir une distance raisonnable (1 mm par exemple) ;
- Cliquer sur l'icône *Groupe de ligne par proximité* et sélectionner comme support le segment de droite associé à la connexion avec la queue ; définir une distance raisonnable (1 mm par exemple) ;
- Eventuellement renommer les deux groupes créés de façon à les différencier aisément par la

suite ;

- En cliquant droit sur le noeud *Groupes* de l'arbre, effectuer la *Mise à jour des groupes* ;
- En cliquant droit sur chacun des groupes, effectuer une *Analyse du groupe* ; dans la fenêtre qui s'ouvre cocher la case *Noeuds* et vérifier que des noeuds ont été trouvés au bon endroit.

Dans le cas des ailes, il faut créer deux groupes :

- Cliquer sur l'icône *Groupe de surface par proximité* et sélectionner comme support la surface associée à la connexion avec le fuselage ; définir une distance raisonnable (1 mm par exemple) ;
- Cliquer sur l'icône *Groupe de surface par proximité* et sélectionner comme support la première surface associée à la connexion avec un aileron ; définir une distance raisonnable (1 mm par exemple) ;
- Répéter cette opération pour le second aileron ;
- Eventuellement renommer les trois groupes créés de façon à les différencier aisément par la suite ;
- En cliquant droit sur le noeud *Groupes* de l'arbre, effectuer la *Mise à jour des groupes* ;
- En cliquant droit sur chacun des groupes, effectuer une *Analyse du groupe* ; dans la fenêtre qui s'ouvre cocher la case *Noeuds* et vérifier que des noeuds ont été trouvés au bon endroit.

Il reste maintenant à créer les groupes associés aux ailerons, et à la queue en suivant la même démarche.

## 4.5 Création de l'assemblage

L'assemblage des différents sous-structure se fait dans l'atelier *Conception mécanique/Assembly Design*. On insère d'abord le fuselage et on le fixe. Les ailes sont ensuite insérées et positionnées par rapport au fuselage à l'aide de contraintes (Angle, Distance). Les ailerons, les deux parties de la queues sont ensuite positionnées à l'aide de contraintes (Angle, Distance, Coïncidences, etc). Le fichier *.CATProduct* associé est enfin sauvegardé.

## 4.6 Analyse éléments finis complète

### 4.6.1 Nouvelle analyse

La première chose à faire est de définir une analyse éléments finis associée à l'assemblage des pièces et plus précisément à l'assemblage des modèles éléments finis créés précédemment.

Pour faire cela :

- Ouvrir le fichier *.CATProduct* correspondant à l'assemblage des différentes sous-structures ;
- Sur chacune des pièces dans l'arbre :
  - Cliquer droit et sélectionner *Représentations/Gérer les représentations* ;
  - Dans la fenêtre qui s'ouvre la seule représentation existante est le fichier *.CATPart* associé ; pour associer l'analyse éléments finis créé pour cette pièce, cliquer sur *Associer* et choisir le fichier *.CATAnalysis* contenant le maillage et les propriétés de la pièce ;
  - Activer cette nouvelle représentation (cela désactive la précédente) ;

L'arbre du produit est désormais composé d'un assemblage d'analyses éléments finis pointant elles même vers les fichiers pièces.

A partir de ce produit, lancer l'atelier *Analyse et Simulation/Generative Structural Analysis*.

#### 4.6.2 Connexion entre degrés de liberté

Il faut maintenant créer les liens entre les degrés de liberté de différents groupes précédemment créés.

- Lancer l'outil *Connexion générale d'analyse* ;
- Comme premier support, sélectionner dans l'arbre le premier des deux groupes à lier ;
- Comme second support, sélectionner dans l'arbre le second des deux groupes à lier.

Pour chacune des connexions ainsi créées entre le fuselage et les ailes, les ailes et les ailerons, la queue et le fuselage, et les deux parties de la queue, il reste à préciser quels sont les degrés de liberté transmis d'une sous-structure à l'autre. Dans notre cas, tous les degrés de liberté sont transmis.

Pour imposer la liaison entre le fuselage et les ailes, on utilisera l'outil *Propriété de connexion rigide* qui permet de relier des degrés de liberté "à distance". Dans la fenêtre qui s'ouvre, il suffit alors de sélectionner dans l'arbre comme support la *Connexion générale d'analyse* associée à cette liaison.

Pour imposer les autres liaisons, on utilisera l'outil *Propriété de connexion soudée*. On suivra ensuite la même démarche que pour la liaison précédente.

#### 4.6.3 Analyse modale

Pour terminer la mise en donnée du problème, il faut insérer (sauf si cela a été fait au lancement de l'atelier) un cas d'analyse modale à l'aide du menu *Insérer/Cas de fréquence*. Dans la fenêtre qui s'ouvre, décocher la case *Fixations* de façon à faire une analyse fréquentielle libre (sans conditions aux limites).

Il ne reste plus qu'à imposer les masses additionnelles sur la queue et les ailes. Pour cela, on peut utiliser l'outil *Masse distribuée*. Dans la fenêtre qui s'ouvre on sélectionnera successivement comme support :

- les deux groupes associés aux zones de contact entre ailes et ailerons (dans le fichier ailerons) ;
- le groupe associé au contact entre les deux parties de la queue (dans le fichier de la queue horizontale) ;

en imposant respectivement des masses de  $2 * 0.2 \text{ kg}$  et  $0.5 \text{ kg}$ .

Il ne reste plus qu'à lancer le calcul.

#### 4.6.4 Post-traitement

Pour obtenir les modes et les fréquences associées, il suffit de cliquer droit sur la *Solution modale* calculée dans l'arbre, et de choisir dans le menu contextuel *Génération d'image*. Dans la fenêtre qui s'ouvre, on choisit de tracer la norme du champ de déplacement.

En double-cliquant sur ce nouvel objet inséré dans l'arbre sous le noeud *Solution modale* on peut choisir le mode affiché en ouvrant l'onglet *Occurrences*. Les 6 premiers modes sont à fréquence nulle (ou presque) et correspondent au 6 modes de corps rigides (3 translations

et 3 rotations). Les deux modes suivant correspondent aux modes de flexion symétriques et antisymétriques des ailes précédemment étudiés. Les fréquences associées sont  $f_1 = 6.49 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 17.12 \text{ Hz}$  et sont relativement proches de celles obtenues par les modèles analytiques approchés.

Enfin, les figures 17 et 18 présentent ces deux modes dans leur ensemble. Les figures 19 et 20 permettent de voir plus précisément le déplacement vertical et la rotation du fuselage.

## 4.7 Commentaires sur les écarts observés

### 4.7.1 Prise en compte de la queue dans le calcul des inerties

Si l'on tient compte de la masse des deux parties de la queue dans le calcul de la fréquence du premier mode associée au modèle avec translation du fuselage, le calcul développé au paragraphe 2.2.2 donne  $f_{1,2} = 7.09 \text{ Hz}$  (on avait  $7.13 \text{ Hz}$ ). La fréquence a légèrement diminué, ce qui est logique puisque la masse mise en jeu dans le mode a augmenté. La modification est par contre tout à fait mineure.

Si l'on tient compte de l'inertie associée aux deux parties de la queue dans le calcul de la fréquence du premier mode associée au modèle avec rotation du fuselage, le calcul développé au paragraphe 2.3.1 donne  $f_{2,2} = 16.73 \text{ Hz}$  (on avait  $18.86 \text{ Hz}$ ). Là encore, la réduction de la fréquence s'explique bien, mais cette fois l'influence de la prise en compte de l'inertie est importante. L'hypothèse consistant à négliger ce terme était un peu abusive. L'écart avec la fréquence propre du modèle complet est passé de 10.1 % à 2.3 %.

Enfin, si l'on tient compte à la fois de la masse et de l'inertie de la queue dans le calcul associé au modèle de la figure 10, on obtient maintenant  $f_{3,3} = 16.78 \text{ Hz}$  (on avait  $18.89 \text{ Hz}$ ). Cette fois l'écart entre le mode éléments finis complet et l'approximation issue de la méthode de Rayleigh-Ritz est inférieur à 2.0 %.

### 4.7.2 Couplage de modes

Le calcul mené au paragraphe 2.2.1 peut être mené sur la queue elle-même. Seules les valeurs numériques sont à modifier. Le modèle poutre encastré libre donne une fréquence fondamentale à  $f = 30.9 \text{ Hz}$  lorsque l'on place des masses à l'extrémité de la queue modélisant la masse additionnelle et la masse de l'aileron arrière.

Si l'on tient compte de l'inertie associée à l'aileron arrière, on obtient  $f = 28.1 \text{ Hz}$ .

Si l'on tient compte, en plus, de la rotation du fuselage et de l'inertie associée au fuselage, aux ailes et aux ailerons, on obtient  $f = 28.8 \text{ Hz}$ .

On peut donc considérer qu'il y a peu de chances qu'il y ait couplage entre les modes de flexion antisymétrique des ailes et de flexion de la queue et que les écarts résiduels observés ne sont pas issus de ce type de phénomène.

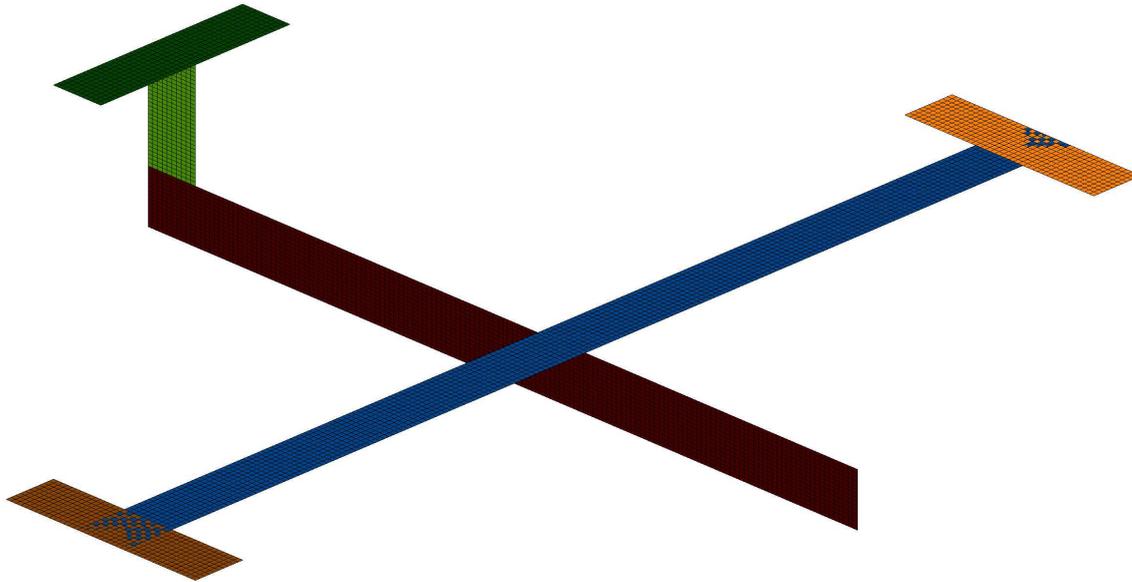


FIG. 16 – Maillage régulier proposé pour les différentes sous-structures de la maquette

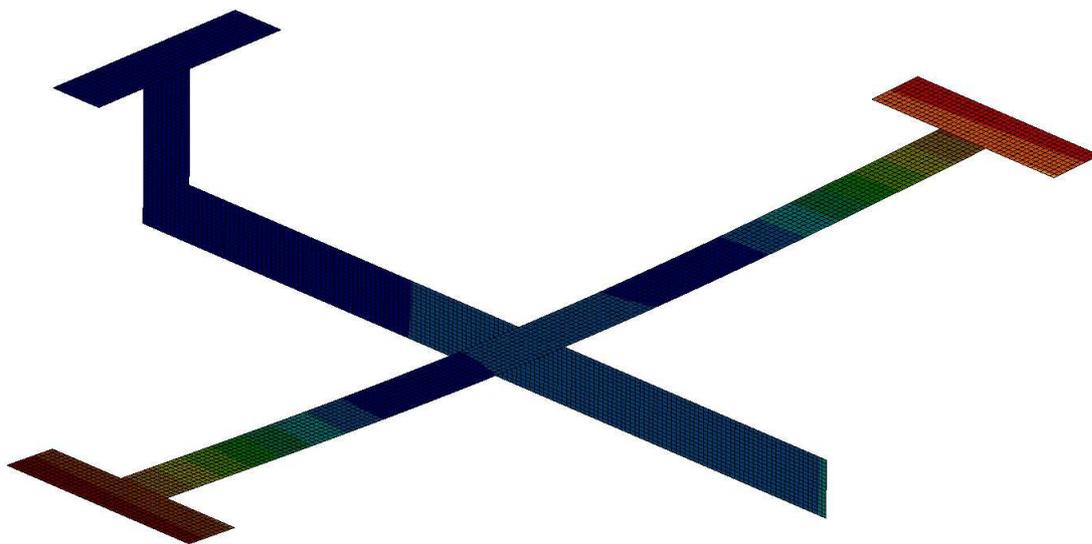


FIG. 17 – Mode de flexion symétrique obtenu avec le modèle éléments finis complet :  $f_1 = 6.49 Hz$

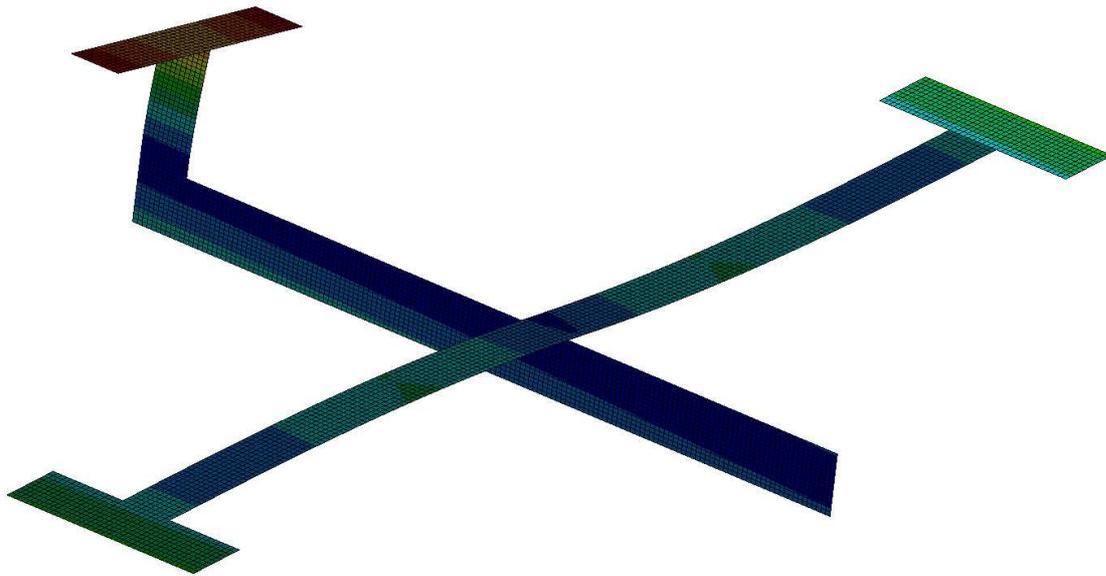


FIG. 18 – Mode de flexion antisymétrique obtenu avec le modèle éléments finis complet :  $f_2 = 17.12 \text{ Hz}$

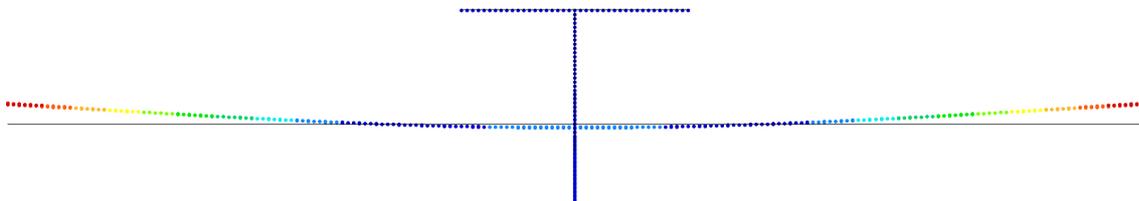


FIG. 19 – Mode de flexion symétrique obtenu avec le modèle éléments finis complet :  $f_1 = 6.49 \text{ Hz}$  - Vue de face

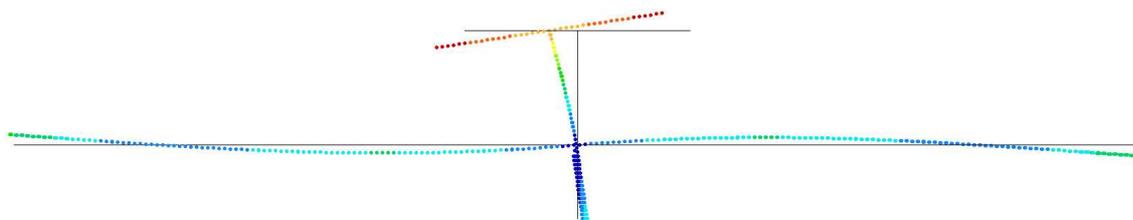


FIG. 20 – Mode de flexion antisymétrique obtenu avec le modèle éléments finis complet :  $f_2 = 17.12 \text{ Hz}$  - Vue de face

Icône	Nom de l'outil	Description sommaire
	Esquisse	Créer une esquisse sur un support plan
	Remplissage	Remplir un contour
	Mailleur	Créer un maillage en surfacique
	Mailleur avancé	Créer un maillage en surfacique
	Maillage de la pièce	Calculer le maillage à partir des spécifications
	Sortie	Sortir de l'atelier permettant de générer le maillage
	Groupe de points	Trouver les noeuds, etc, sur des points
	Groupe de lignes	Trouver les noeuds, etc, sur des lignes
	Groupe de surfaces	Trouver les noeuds, etc, sur des surfaces
	Groupe de points par proximité	Trouver les noeuds, etc, proches de points
	Groupe de lignes par proximité	Trouver les noeuds, etc, proches de lignes
	Groupe de surfaces par proximité	Trouver les noeuds, etc, proches de surfaces
	Pièce virtuelle rigide	Connecter rigidement un point à une géométrie
	Pièce virtuelle ressort rigide	Lier élastiquement et rigidifier une géométrie à un point
	Connexion d'analyse générale	Créer une liaison entre deux futurs maillages
	Propriété de connexion soudée	Transmettre tous les ddl entre deux maillages
	Propriété de connexion rigide	Imposer une connexion à distance
	Encastrement	Bloquer tous les ddl d'un support
	Contraintes avancées	Bloquer les ddl choisis d'un support
	Propriétés coques	Préciser l'épaisseur des coques
	Matériau utilisateur	Créer un matériau à partir d'une bibliothèque
	Calcul	Lancer le calcul de toutes ou d'une partie des analyses

TAB. 4 – Outils utilisés dans Catia et icônes correspondantes dans les ateliers utilisés